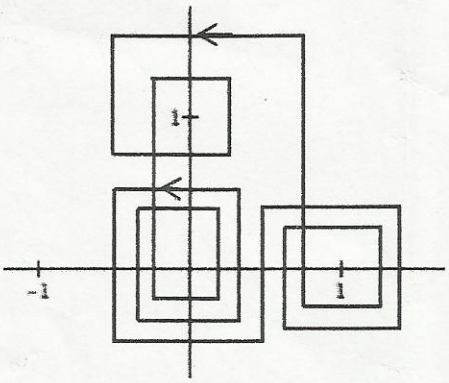
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Τομέας Μαθηματικῆς Ἀνάλυσης

Καθηγητής: Γεώργιος Καρακώστας *Ἰωάννινα, 24-09-2015*

Ἐξετάσεις Περιόδου Σεπτεμβρίου στὸ μάθημα **Μιγαδικὲς Συναρτήσεις 1**

1. α) Νὰ βρεθεῖ ὁ δείκτης στροφῆς της καμπύλης τοῦ σχήματος ὡς πρὸς τὰ σημεῖα $0, 1, i$. [05]



Σχήμα 1:

β) Ἂν c εἶναι ἡ προηγούμενη καμπύλη καὶ w εἶναι τυχὼν μιγαδικὸς ἀριθμός, νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$F(w) = \int_c \frac{e^{wz}dz}{z(z^2-(1+i)z+i)}. \text{ [10]}$$

γ) Νὰ ἐξεταστεῖ ἂν ὑπάρχει τὸ ὅριο τῆς $F(w)$ ὅταν τὸ w τείνει πρὸς τὸ ∞ καὶ ἂν "ναι", νὰ βρεθεῖ τοῦτο. [10]

δ) Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_c \frac{F(z)}{z}dz. \text{ [10]}$$

2. Νὰ βρεθοῦν τὰ σημεῖα ἀσυνέχειας τῆς συνάρτησης μὲ τύπο $f(z) = 1 + 2i - z^2\cos z + z\text{Log}(1+2i-z^2)$. [10]

3. Ἔστω $f(z)$ μιὰ ἀκεραία συνάρτηση μὲ ἀλγεβρικὴ παράσταση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

α) Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι κάθε καμπύλη τῆς μορφῆς $u(x,y) = c$ τέμνει κάθετα κάθε καμπύλη τῆς μορφῆς $v(x,y) = c'$. [08]

β) Ἂν ἡ συνάρτηση u δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $u(x,y) = e^x\cos(y) + x^2 - y^2$, νὰ προσδιοριστεῖ ἡ συνάρτηση $v(x,y)$, ὅταν εἶναι γνωστὸ ὅτι ἰσχύει $f(0) = i$. [08]

4. Ἔστω f μία συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν δακτύλιο $\Delta(a,0,r)$.

α) Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι, ἂν a εἶναι οὐσιωδῶς ἀνώμαλο γιὰ τὴν f, τότε γιὰ κάθε d, κάθε $\epsilon > 0$ καὶ κάθε $\delta \in (0,r)$ ὑπάρχει z μὲ $0 < |z-a| < \delta$ καὶ $|f(z)-d| < \epsilon$. [08]

β) Νὰ ἐξεταστεῖ ἂν ἀληθεύει ὅτι ὅταν a εἶναι οὐσιωδῶς ἀνώμαλο γιὰ τὴν f^2, τότε εἶναι οὐσιωδῶς ἀνώμαλο καὶ γιὰ τὴν f. [08]

5. Νὰ ἀποδειχτεῖ τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἄλγεβρας, δηλαδὴ ὅτι κάθε πολυωνυμικὴ ἐξίσωση βαθμοῦ n ἔχει ἀκριβῶς n μιγαδικὲς ρίζες. [10]

6. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}dx. \text{ [13]}$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ